بسمه تعالی

سوالات میان ترم ریاضی مهندسی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

از پاییز ۸۶ تا پاییز ۹۶

اسفند ۹۷

@petjozve_aut

۸۶ ترم

وقت ۱۰۰ دقیقه	220 دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران) دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر امتحان میان‌ترم ریاضیات مهندسی نیمسال اول ۸۷-۸۶ (یکشنبه ۸۶/۸/۲۰)	

گروه:	شماره دانشجوئی:	نام و نام خانوادگی:

۱ الف) نشان دهید بسط فوریه تابع $f(t) = t, \ -\pi < t < \pi$ عبارت است از

$$f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

ج) نشان دهید که بسط فوریه تابع $g(t) = t^3, \ -\pi < t < \pi$ عبارت است از

$$g(t) = \pi^2 f(t) + 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nt$$

د) با در نظر گرفتن مقدار مناسبی برای t در بخش (ج) نشان دهید که

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

۲ معادله لاگرانژ $xZ_x + Z_y = x - Z$ را با شرایط $Z(0,y) = Z(x,0) = 0$ حل کنید و نشان دهید که

$$Z = \frac{1}{2}x(1 - e^{-2y})$$

راهنمائی: اگر u و v جواب‌های اختیاری باشند $v = \phi(u)$ در نظر بگیرید.

۳ نخست معادله زیر را به صورت کانونی در آورید و سپس آن را حل کنید.

$$U_{xx} - 2xU_{xy} + x^2U_{yy} - \frac{1}{x}U_x = 0$$

۴ با پذیرش رابطه $\int_0^{\infty} e^{-x^2 t} \cos \lambda x \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \ e^{-\lambda^2/(4t)}$ برای $t > 0$ و اینکه تبدیل فوریه نامحدود تابع $u(x,t); -\infty < x < \infty, \ t > 0$ به صورت زیر می‌باشد

$$F[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\lambda x}dx = U(\lambda, t)$$

معادله زیر را حل کنید

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}; -\infty < x < \infty, \ t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} u(x,t) = 0, \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} u_x(x,t) = 0. \end{cases}$$

موفق باشید

وقت ۱۲۰ دقیقه	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران) دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر امتحان میان‌ترم ریاضیات مهندسی نیمسال دوم ۸۷-۸۶ (شنبه ۸۷/۱/۲۴)	3

گروه:	شماره دانشجویی:	نام و نام خانوادگی:

۱ فرم کانونی معادله زیر را به‌دست آورید و سپس آن‌را حل کنید.

$$y^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = \frac{y^2}{x}u_x + \frac{x^2}{y}u_y$$

۲ با استفاده از روش جداسازی متغیرها معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r,\theta) = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < a,\ 0 \le \theta \le \pi \\ u(a,\theta) = u_0(\text{ constant }) \\ u(r,0) = 0 \\ u(r,\pi) = 0 \end{cases}$$

۳ معادله موج زیر مفروض است

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0,$$
$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0,\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0.$$

اگر داشته باشیم

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{cn\pi t}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

الف) نشان دهید که

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$

ب) اگر در معادله بالا داشته باشیم $c = 1,\ f(x) = x,\ \ell = 1$، با انتخاب $x = 1/2$ و $t = 2$ نشان دهید که $u(\frac{1}{2}, 2) = 1$ (راهنمائی: گراف $f(x)$ را به‌صورت فرد ادامه دهید)

۴ فقط به کمک تبدیلات فوریه معادله زیر را حل کنید

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ \ 0 < x < 1,\ \ t > 0,$$
$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0,$$
$$u(0,t) = t, \quad u(1,t) = 0.$$

۵ معادله گرمای زیر را حل کنید

$$u_t - u_{xx} = x,\ \ 0 < x < 1,\ \ t > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 1.$$

$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2,\ B^* = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + 2C\xi_y\eta_y,\ C^* = A^*; \eta \to \xi$ موفق باشید

$D^* = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y,\ E^* = D^*, \eta \to \xi,\ F^* = F,\ G^* = G$

وقت ۱۲۰ دقیقه	پاسخ ۸۷	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران) دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر امتحان میان‌ترم ریاضیات مهندسی نیمسال اول ۸۸-۸۷ (شنبه ۸۷/۸/۱۸)	341	

نام و نام خانوادگی:	شماره دانشجوئی:	گروه:

فقط به چهار سوال از پنج سوال زیر پاسخ دهید

۱) به کمک یک بسط فوریه مناسب و یا تبدیلات فوریه معادله زیر را حل کنید

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \dfrac{\pi}{2}x \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = x, \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

۲) فرض کنیم که برای $-\infty < x < \infty$ و $\lambda > 0$ ، $Y[\lambda] = Y[y(x)]$ تبدیل فوریه $y(x)$ باشد.

الف) روابط بین $y(x)$ و $Y[\lambda]$ را بدون اثبات بنویسید.

الف) نشان دهید

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{1+\lambda^2} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

الف) با پذیرش رابطه $Y[y^{(n)}(x)] = (i\lambda)^n Y[\lambda]$ و با تبدیل فوریه گیری و استفاده از الف و ب معادله زیر را حل کنید

$$y' - y = H(x)e^{-x}; \quad -\infty < x < \infty; \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

۳) معادله خطی زیر را درون ناحیه حلقوی $1 < r < 2$ حل کنید

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r,\theta) = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(1,\theta) = 0, \\ u(2,\theta) = \sin\theta, \end{cases}$$

۴) رویه‌ای از جواب‌های معادله زیر را بیابید که بر خم $y = z^3$ و $x = 0$ بگذرد

$$(x+z)z_x + (y+z)z_y = 0$$

۵) الف) معادله زیر را به صورت کانونی در آورید

$$u_{xx} - u_{yy} + 3u_x - 2u_y + u = 0$$

ب) معادله زیر مفروض است

$$4u_{\xi\eta} + 5u_\xi - u_\eta - u = 0$$

با انتخاب N و M در تبدیل $u = ve^{M\xi + N\eta}$ معادله داده شده را به صورت زیر در آورید و K را محاسبه کنید

$$v_{\xi\eta} = Kv$$

موفق باشید

بهار ۸۹

۱۶۰

به نام خدا

سوالات میان ترم ریاضیات مهندسی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

نام :
نام خانوادگی :
گروه :
شماره دانشجویی :
نام استاد درس :

تاریخ : ۸۹/۰۲/۷
مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
ساعت : ۱۷

۱- تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ,|x|<1\\ 0 & ,|x|>1\end{cases}$ مفروض است :

الف : تبدیل فوریه آن (یعنی $F(\lambda)$) را بیابید.

ب : به کمک "الف" ثابت کنید که $\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda=\frac{\pi}{2}$.

ج : با توجه به تساوی پارسوال، $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(f(\lambda))^2d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x))^2dx$ ، در انتگرال های فوریه، ثابت کنید که $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)^2d\lambda=\pi$.

د : با استفاده از موارد بالا نشان دهید که انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{\sin^4\lambda}{\lambda^2}d\lambda=\frac{\pi}{4}$

۲- معادله ناهمگن موج زیر مفروض است :

$$u_{tt}-u_{xx}=\sin\pi x\quad,\ 0<x<1\,,\ t>0$$
$$u(x,0)=u_t(x,0)=0$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0$$

الف : اگر داشته باشیم $u(x,t)=V(x,t)+W(x)$ که در آن W جواب بخش ناهمگن و V جواب بخش همگن باشند، $W(x)$ را تعیین کنید.

ب : با نوشتن معادله همگن و استفاده از جواب دالامبر نشان دهید که

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi^2}(\sin\pi x)(1-\cos\pi t)$$

ادامه پشت صفحه --->

آبان ۸۹

« امتحان میان ترم ریاضی مهندسی »

نام و نام خانوادگی :　　　　شماره دانشجویی :　　　　مدت : ۱۲۰ دقیقه (شنبه ۸۹/۸/۱۵)

۱- تابع $-\pi<x<0 \quad , \quad f(x)=x+\pi$ مفروض است :

الف: تابع را گسترش زوج دهید و سری فوریه آن را به دست آورید.

ب : به کمک تساوی پارسوال ثابت کنید که:

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

۲- فقط با استفاده از تبدیلات فوریه معادله زیر را حل کنید:

$$u_t=u_{xx}+x \qquad 0<x<\pi \ , \ t>0$$

$$u(x,0)=x$$

$$u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0$$

۳- با تقریب شرایط مرزی معادله زیر به یک چندجمله ای حداکثر از درجه ۳ جواب های آن معادله را درون و بیرون دایره قطبی $r=a$ بیابید.

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \qquad r<a<1$$

$$u(a,\theta)=e^{x^2}+2y^3+xy$$

۴- الف : از تغییر متغیر $w(x,t)=u(x,t)e^{-t}$ استفاده کرده و معادله $w_{tt}+2w_t+w=4w_{xx}$ را به معادله موج تبدیل کنید.

ب : معادله به دست آمده قسمت الف را به فوم کانونی تبدیل کرده و سپس آن را با شرایط اولیه $u(x,0)=\sin x \ , \ u_t(x,0)=\cos x$ حل کنید.

موفق باشید

۹۰٫۱۲

«به نام خدا»

۲۶۱

«امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی»

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: مدت: ۱۱۰ دقیقه (دو شنبه ۹۰/۲/۵)

۱- با قراردادن $u(x,y)=f(x)g(y)$ معادله زیر را حل کنید.

$$x^2u_{xy}+9y^2u=0 \quad , \quad u(x,0)=\exp(\frac{1}{x})$$

۲- معادله زیررا حل کنید:

$$u_t=u_{xx} \quad , \quad 0<x<\ell \quad , \quad t>0$$
$$u_x(0,t)=u_x(\ell,t)=0$$
$$u(x,0)=f(x)$$

---

۳ - معادله زیر مفروض است:

$$u_{tt}=u_{xx}-2u_t \quad , \quad 0<x<1 \quad , \quad t>0$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0$$
$$u(x,0)=0$$
$$u_t(x,0)=Sin\,\pi x-Sin\,2\pi x$$

با نوشتن $u(x,t)=ASin\,\pi x+BSin2\pi x$ ، ماهیت B , A را مشخص کرده و آن را حل کنید. (چنانچه معادله را با روش دلخواه خودتان حل کنید مورد قبول خواهد بود) .

۴- معادله زیر مفروض است.

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \ , \ t>0$$
$$u_t(x,0)=\frac{x}{(1+x^2)^2} \quad , \quad u(x,0)=\exp(-x^2)$$

با معرفی $\alpha=x+ct$ و $\beta=x-ct$ نشان دهید معادله به فرم کانونی $u_{\alpha\beta}=0$ در می‌آید وسپس u را تعیین کنید.

«موفق باشید»

میان ترم ریاضی مهندسی	به نام خدا	نام:
تاریخ: ۹۱/۰۸/۱۵	۱۲۲	نام خانوادگی:
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		شماره دانشجویی:
ساعت: ۱۵:۰۰	دانشگاه صنعتی امیرکبیر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	نام استاد درس:

فقط به یکی از دو سوال ۱ و ۲ پاسخ دهید

۱- فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی متناوب با دوره تناوب $T = 1$ باشند و سری فوریه آن‌ها توسط روابط زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2in\pi x} , \quad g(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m e^{2im\pi x}$$

الف) اگر ضرایب سری فوریه مختلط $h(x) = f(x)g(x)$ را با c_k نمایش دهیم، مطلوبست محاسبه c_k بر حسب ضرایب a_n و b_m ؟ (۶ نمره)

ب) اگر تابع $f(x)$ علاوه بر دوره تناوب یک، دارای خاصیت زیر نیز باشد

$$f\left(x - \frac{1}{2}\right) = -f(x) ,$$

نشان دهید در سری فوریه f به ازاء n های زوج داریم: $a_n = 0$ (۳ نمره)

ج) با استفاده از قسمت الف ضرایب سری فوریه مختلط تابع زیر را روی بازه $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ محاسبه کنید. (۴ نمره)

$$h(x) = \cos^3(2\pi x) \sin^2(2\pi x)$$

۲- **الف)** سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x^2$ را روی فاصله $[0, \pi]$ بدست آورید. (۳ نمره)

ادامه سوالات پشت برگه

ب) با استفاده از قسمت الف سری فوریه سینوسی تابع $g(x) = x(\pi - x)(\pi + x)$ را روی فاصله $[0, \pi]$ بدست آورید. (۲ نمره)

ج) معادله موج غیرهمگن زیر را حل کنید: (۸ نمره)

$$U_{tt} - U_{xx} = tx(\pi - x)(\pi + x), \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0,$$

$$U(0,t) = U(\pi, t) = 0, \qquad t > 0,$$

$$U(x,0) = 8\sin(x)\cos^3(x) - 2\sin(2x),$$

$$U_t(x,0) = 1$$

۳- با استفاده از تبدیل فوریه معادله موج نامحدود زیر را حل کنید. (۹ نمره)

$$U_{tt} = c^2 U_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$U(x,0) = 0, \qquad U_t(x,0) = f(x).$$

٤- معادله زیر را به فرم کانونی تبدیل نموده و سپس آن را حل کنید. (۹ نمره)

$$3U_{xx} + 10U_{xy} + 3U_{yy} = x + 1$$

۵- معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید. (۹ نمره)

$$(x + y)Z_x + (x + y)Z_y + (x + y + 2Z) = 0$$

"ریاضیات علم آموختن اندیشیدن است نه آموختن اندیشه ها" جورج پولیا

موفق باشید

۹۲/۳

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۲۴۹

نام و نام خانوادگی: **شماره دانشجویی:** **وقت:** ۱۰۰ دقیقه **زمان:** ۹۲/۰۱/۲۶

۱- معادله‌ی زیر که در آن x تابعی از t می باشد، مفروض است:

$$z_t + 5z_x = e^{3t} \quad , \quad z(x(t),0) = e^{-[x(t)]^2}$$

الف: نشان دهید که $x - 5t = c_1 \quad , \quad z(x(t),t) = \frac{1}{3}e^{3t} + c_2$

که در آن c_2, c_1 دو ثابت دلخواه می باشند.

ب : نشان دهید که جواب معادله‌ی بالا عبارتست از:

$$z(x(t),t) = \frac{1}{3}e^{3t} + e^{-[x(t)-5t]^2} - \frac{1}{3}$$

۲- با استفاده از تبدیل فوریه معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$u_{tx} = u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \quad , \quad u(x,0) = e^{-|x|}$$

راهنمایی: در پایان جهت یافتن $u(x,t)$ از رابطه‌ی زیر استفاده نمایید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+\lambda^2} d\lambda = \pi e^{-|x|}$$

۳- معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < \ell \quad , \quad u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$

۴- معادله‌ی لاپلاس قطبی زیر را حل کنید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad 0 < r < 2 \quad , \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$u(2,\theta) = Sin\, 4\theta \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$u(r,0) = u(r,\frac{\pi}{2}) = 0 \qquad 0 < r < 2$$

موفق باشید

میان ترم ریاضیات‌مهندسی مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه سال ۹۳-۹۲	به نام خدا دانشگاه صنعتی امیرکبیر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر	نام: نام خانوادگی: شماره دانشجویی:

پاسخ ۹۲

۲۶۰

۱- فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته در $(-\infty,+\infty)$ باشد به‌طوری‌که در $\pm\infty$ به صفر میل کند.

الف) نشان دهید تابع زیر دارای تناوب 2π است. (۲ نمره)

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)$$

ب) نشان دهید ضرایب سری فوریه مختلط تابع $g(x)$ روی $(-\pi,\pi)$ توسط رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود. (۵ نمره)

$$C_m=\frac{1}{2\pi}F(m),$$

که در آن $F(m)$ تبدیل فوریه نامحدود $f(x)$ است.

ج) نشان دهید تساوی زیر برقرار است. (۳ نمره)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n)$$

۲- با استفاده از روش جداسازی متغیرها معادله‌ی زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$u_t=2u_{xx}\,,\ -1<x<1\,,\ t>0\,,$

$u(-1,t)=u(1,t)\,,\qquad t>0,$

$u_x(-1,t)=u_x(1,t)\qquad t>0,$

$u(x,0)=|x|$

ادامه پشت برگه

۳- الف) از میان جواب‌های عمومی معادله‌ی دیفرانسیل زیر، جوابی رابیابید که در شرط $\begin{cases} x+y=0 \\ u=1 \end{cases}$ صدق کند.
(۵ نمره)

$$x(y^2+u)u_x - y(x^2+u)u_y = (x^2-y^2)u$$

ب) معادله‌ی زیر را به فرم کانونی درآورده و سپس جواب آن را بیابید. (۵ نمره)

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y$$

٤- معادله‌ی زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$u_{tt} - u_{xx} = 2\sinh(x)\,, \qquad 0 < x < 1\,, \qquad t > 0\,,$$

$$u(0,t) = 2\sinh(1)\,, \qquad t > 0,$$

$$u(1,t) = 0, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

با آرزوی توفیق

۲۱

93، بهار

امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی

« دانشگاه صنعتی امیرکبیر »

نام و نام‌خانوادگی: **دو شنبه: 93/01/25**

شماره دانشجویی: **مدت: 100 دقیقه**

1- فرض کنید $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π و ضابطه‌ی $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad |x|\le\pi$ باشد. سری فوریه f را بیابید و نتیجه بگیرید:

الف: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=2$

ب: $\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{2}$

2- به کمک تبدیل فوریه معادله دیفرانسیل جزئی زیر را حل کنید. (k و c اعدادی ثابت هستند)

$$U_t=kU_{xx}+cU_x\ , \quad -\infty<x<\infty$$

$$U(x,0)=f(x)$$

ب: اگر $k=0$، $c=\pi$ و $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$، مقدار دقیق $U\left(\frac{\pi}{6},2\right)$ را محاسبه کنید.

3- پس از تبدیل معادله دیفرانسیل زیر به فرم کانونی و حل آن، جوابی از آن را بیابید که در شرایط $\begin{cases}U(0,y)=\sin(y)\\ U_x(0,y)=1\end{cases}$ صدق کند.

$$yU_{xx}+3yU_{xy}+3U_x=0, \quad (y\neq0)$$

4- با روش جداسازی متغیرها نشان دهید جواب معادله زیر

$$U_t=U_{xx}, \quad t>0, \quad x>0$$
$$U_x(0,t)=0$$
$$|U(\infty,t)|<\infty$$
$$U(x,0)=f(x)$$

به فرم $U(x,t)=\int_0^{\infty}C(w)e^{-w^2t}\cos(wx)dw$ است که در آن $C(w)$ تابعی دلخواه از w است.

موفق باشید

۹۴/۱/۱۷

امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی

۳۶

مدت: ۱۰۰ دقیقه

زمان: ۹۴/۰۱/۲۹

۱- تابع زیر مفروض است:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < \ell \\ 3 & \ell < x < 2\ell \end{cases}$$

الف: نشان دهید که سری فوریه $f(x)$ به صورت زیر می باشد:

$$f(x) = \frac{5}{2} - \sum_{n=1,3,}^{\infty} \frac{2}{n\pi} Sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

ب) مقدار $f(x)$ را در نقاط ناپیوستگی به دست آورید.

ج) به کمک بسط فوریه $f(x)$ ثابت کنید که $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$

۲- از میان تمام رویه های جواب معادله ی زیر، رویه ای را بیابید که برخم $z(x,x) = 0$ بگذرد.

$$(x+y-z)z_x - (x+y+z)z_y = 2z$$

۳- معادله زیر را پس از تبدیل به فرم کانونی حل کنید.

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2y u_y = 0 \qquad y \neq 0$$

۴- معادله‌ی زیر مفروض است:

$$u_x + u_t + u + 0 \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

چنانچه تبدیل فوریه $u(x,t)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathcal{F}[u(x,t)] = U(\lambda,t)$$

الف) نشان دهید که:

$$\mathcal{F}[u_x(x,t)] = i\,\lambda\, U(\lambda,t)$$

با تبدیل فوریه گرفتن از طرفین معادله، آن را حل کنید.

موفق باشید

۹۴ پاییز

۲۵۸

امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی

« دانشگاه صنعتی امیرکبیر »

نام و نام‌خانوادگی: **شنبه:** 94/8/16

شماره دانشجویی: **مدت:** 110 دقیقه

1- الف: به کمک روش جداسازی متغیرها، جواب معادله زیر را بدست آورید. (5 نمره)

$$\begin{cases} y^2u_x^2 + x^2u_y^2 = (xyu)^2 \\ u(x,0) = 3e^{\frac{x^2}{4}} \end{cases}$$

ب: جواب معادله زیر را با شرط $z(1,y) = y$ بیابید. (4 نمره)

$$xz_x + (x+y)z_y = 1$$

2- معادله زیر را حل کنید. (9 نمره)

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = (1-x)\cos(t)\,, \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0,t) = \cos(t) - 1 \\ u_x(\pi,t) = \cos(t) \qquad\qquad , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = \frac{x^2}{2\pi} \\ u_t(x,0) = \cos(3x) \qquad\qquad , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

3- فقط به کمک تبدیل فوریه معادله‌ی زیر را حل کنید. (9 نمره)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,, \quad x > 0\,, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \\ u_x(0,t) = 1 \end{cases}$$

4- جواب معادله لاپلاس زیر را بدست آورید. (9 نمره)

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u_r(1,\theta) - u(1,\theta) = 0 \end{cases}$$

موفق باشید

بهار ۹۵

۱۶۰

امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی

« دانشگاه صنعتی امیرکبیر »

نام و نام‌خانوادگی: **دوشنبه: ۹۵/۰۱/۳۰**

شماره دانشجویی: **مدت: ۱۲۰ دقیقه**

۱- اگر انتگرال فوریه تابع $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(cos^4(x) + sin^4(x))dx$ را بیابید. (۷ نمره)

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x) + \alpha\sin(\alpha x)}{\alpha^2 + 4}\, d\alpha$$

۲- با استفاده از تبدیل فوریه معادله زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - 4u = 1, \ \ 0 < x, y < \pi \\ u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 0 \\ u(0, y) = \begin{cases} y, & 0 < y < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - y, & \dfrac{\pi}{2} < y < \pi \end{cases} \end{cases}$$

۳- معادله مشتق جزئی زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = (x + y)^3 z$$

٤- جواب معادله زیر را بدست آورید. (۷ نمره)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = -2x, \ \ 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, \ u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1 \end{cases}$$

۵- معادله زیر را به فرم کانونی تبدیل نموده و آن را حل نمایید. (۷ نمره)

$$xu_{tt} + (x + t)u_{xt} + tu_{xx} = 0$$

موفق باشید

۱۶۲

۹۸ پاییز

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

شنبه 95/08/15
مدت 100 دقیقه

1. الف) با استفاده از عملگر ها معادله زیر را حل کنید.

$$u_{tt} = u_{\mathrm{xx}}$$

$$u_t(x,0) = 0 \quad , \quad u(x,0) = x^2\, e^{-x}$$

نظر جمعدا

ب) ابتدا جواب عمومی معادله همگن زیر را بیابید.

$$4z_y - 2z_x + 5z = e^{x+3y}$$

سپس با استفاده از تبدیلات $\xi = -2x + 4y \,,\ \eta = 4x + 2y$ معادله فوق را برحسب ξ و η بنویسید و معادله به دست آمده را حل نمایید.

2. معادله زیر را حل کنید.

$$u_t = u_{xx} + cos(2\pi x) \qquad 0 < x < 1\,, t > 0$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = \cos \pi x$$

3. معادله زیر را حل کنید و سپس $u(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6})$ را بیابید.

$$u_{\mathrm{rr}} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad 0 < r < 1$$

$$u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0$$

$$u(1,\theta) = 6\cos 2\theta - 5\cos 3\theta$$

4. فقط با استفاده از تبدیل فوریه مناسب معادله زیر را حل کنید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 < x < \pi \qquad y > 0$$

$$u(0,y) = 0$$

$$u(\pi,y) = e^{-2(y+3)}$$

$$u_y(x,0) = 0$$

موفق باشید

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

شنبه 95/08/15

مدت 100 دقیقه

---

1. الف) با استفاده از عملگر ها معادله زیر را حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u_t(x,0) = 0 \quad , \quad u(x,0) = x^2\, e^{-x}$$

ب) ابتدا جواب عمومی معادله همگن زیر را بیابید.

$$4z_y - 2z_x + 5z = e^{x+3y}$$

سپس با استفاده از تبدیلات $\xi = -2x + 4y\ ,\ \eta = 4x + 2y$ معادله فوق را برحسب ξ و η بنویسید و معادله به دست آمده را حل نمایید.

---

2. معادله زیر را حل کنید.

$$u_t = u_{xx} + \cos(2\pi x) \qquad 0 < x < 1\,, t > 0$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = \cos \pi x$$

---

3. معادله زیر را حل کنید و سپس $u(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6})$ را بیابید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad 0 < r < 1$$

$$u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0$$

$$u(1,\theta) = 6\cos 2\theta - 5\cos 3\theta$$

---

4. فقط با استفاده از تبدیل فوریه مناسب معادله زیر را حل کنید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 < x < \pi \qquad y > 0$$

$$u(0,y) = 0$$

$$u(\pi,y) = e^{-2(y+3)}$$

$$u_y(x,0) = 0$$

موفق باشید

Quiz 1

Time: 15 minutes

Solve and graph the solutions of following equation

$$z^4 - 6iz^2 + 16 = 0$$

الف)

اپراتور

$$(D_t^2 - D_x^2)u = 0 \quad , \quad e^{D_t t + D_x x}$$

$$D_t = D_x \Rightarrow e^{D_t t + D_t x} = e^{D_t(x+t)} = f(x+t)$$

$$D_t = -D_x \Rightarrow e^{D_t t - D_t x} = e^{D_t(t-x)} = g(x-t)$$

$$\boxed{u = f(x+t) + g(x-t)}$$

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = x^2 e^{-x} \\ f'(x) - g'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = x^2 e^{x} \\ f(x) - g(x) = c_1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x} + \frac{c_1}{2} \qquad g(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x} - \frac{c_1}{2}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2}(x+t)^2 e^{x+t} + \frac{1}{2}(x-t)^2 e^{x-t}}$$

ب)

$$4Z_y - 2Z_x + 5Z = e^{x+3y}$$

$$\eta = 4x + 2y \quad , \quad \xi = -2x + 4y$$

$$Z_x = Z_\eta(4) + Z_\xi(-2) \quad , \quad Z_y = Z_\eta(2) + Z_\xi(4)$$

$$20 Z_\xi + 5Z = e^{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta}$$

$$Z_\xi + \frac{1}{4}Z = \frac{1}{20} e^{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta}$$

$$F = e^{\frac{1}{4}\xi}$$

$$Z = c_1(\eta) e^{-\frac{1}{4}\xi} + \frac{\frac{1}{20} e^{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$$

$$\boxed{Z = c_1(\eta) e^{-\frac{1}{4}\xi} + \frac{1}{15} e^{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta}}$$

$$u_t = u_{xx} + \cos 2\pi x \qquad 0<x<1,\ t>0$$ -2

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = \cos \pi x$$

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$F(x) = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x$$

$$F'(0)=0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$F'(1)=0 \Rightarrow \sin \omega = 0 \Rightarrow \omega = n\pi \quad \Rightarrow \quad F(x) = \left\{ \cos n\pi x \right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi x)\, G(t)$$

$$@\ PDE \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \dot{G} \cos(n\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} -n^2\pi^2 G(t) \cos n\pi x + \cos 2\pi x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\dot{G} + n^2\pi^2 G) \cos n\pi x = \cos 2\pi x$$

$$n=2 \Rightarrow \dot{G} + 4\pi^2 G = 1 \Rightarrow G_2 = A e^{-4\pi^2 t} + \frac{1}{4\pi^2}$$

$$n \neq 2 \Rightarrow \dot{G} + n^2\pi^2 G = 0 \Rightarrow G_n = A e^{-n^2\pi^2 t}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-4\pi^2 t} \cos(2\pi x) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \cos n\pi x$$

$$@\ t=0 \Rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \cos(2\pi x) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\pi x = \cos \pi x$$

$$n \neq 1,2 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A_n = 0 \\ A_1 = 1 \end{matrix}}, \quad n=2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi^2} + A_2 = 0 \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{-1}{4\pi^2}}$$

$$n = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\cos \pi x - \frac{1}{4\pi^2} e^{-4\pi^2 t}\cos 2\pi x}$$

3- فرم جواب به صورت زیر است.

$$u = a\underset{0}{\overset{r=0}{\cancel{\ln r}}} + b + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A r^{n} + \underset{0}{\overset{r=0}{\cancel{B r^{-n}}}}\right)\underbrace{\left(C_1 \sin n\theta + C_2 \cos n\theta\right)}$$

$$G'' + \omega^2 G = 0, \quad G'(0) = G'(\pi) = 0$$

$$C_1 = 0, \quad G = \{\cos n\theta\}_{n=0}^{\infty}$$

$$\boxed{u = b + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta}$$

$$u(1,\theta) = 6\cos 2\theta - 5\cos 3\theta = b + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta$$

$$A_n = \begin{cases} 6 & n = 2 \\ -5 & n = 3 \\ 0 & n \neq 2,3 \end{cases}, \quad b = 0$$

$$\boxed{u = 6r^2\cos 2\theta - 5r^3 \cos 3\theta}$$

4- سوال در امتحان‌های 96,1 و 96,8 حل شده است.

مدت ۱۰۰ تاریخ ۹۶/۲/۲۶

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

۱- الف: بسط فوریه $f(x) = \cos^2 x$ را در دوره تناوبش بیابید (3 نمره)

ب: به کمک الف مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید (4 نمره)

$$\int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$$

2- معادله زیر را حل کنید (8 نمره)

$$2Z_x - 3Z_y + (x+y)Z = 0, \quad Z(x,0) = x^2$$

3- الف: با تغییر متغیر $u(x, y+3) = v(x,y)$ شکل جدید معادله لاپلاس زیر را بیابید (2 نمره)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 < x < \pi, \; y > 3$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(\pi, y) = e^{-2y}, \quad u_y(x,3) = 0$$

ب: به کمک تبدیل فوریه مناسب معادله لاپلاس زیر را حل کنید (8 نمره)

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \qquad 0 < x < \pi, \quad y > 0$$

$$v(0,y) = 0, \quad v(\pi, y) = e^{-2(y+3)}, \quad v_y(x,0) = 0$$

4- با استفاده از جداسازی متغیرها مسئله زیر را حل کنید (10 نمره)

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \qquad 0 \le r < 1, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$u(1,\theta) = g(\theta), \qquad u(r,0) = u(r, \tfrac{\pi}{2}) = 0$$

موفق باشید

پاسخنامه امتحان 96/1/26

۱- الف)

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

دوره تناوب تابع f برابر است با π و چون تابعی زوج است شکل بسط آن به صورت زیر می‌شود

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

جملات را با هم مقایسه می‌کنیم

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2x + a_2 \cos 4x + \cdots$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -\frac{1}{2} & n = 1 \\ 0 & n \neq 0, 1 \end{cases}$$

ب) از اتحاد پارسوال استفاده می‌کنیم

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + a_2^2 + \cdots \Longrightarrow \int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx = \frac{3\pi}{8}$$

-2

$$2Z_x - 3Z_y + (x+y)Z = 0 \qquad Z(x,0) = x^2$$

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{-3} = \frac{dz}{-(x+y)z} = \frac{dx+dy}{-1}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{-y}{3} + c_1 \qquad \frac{dz}{z} = (x+y)\, d(x+y)$$

$$\ln z = \frac{1}{2}(x+y)^2 + c_2$$

جواب عمومی معادله : $\phi\Big(\underbrace{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}}_{u}, \underbrace{\ln z - \frac{1}{2}(x+y)^2}_{v}\Big) = 0$

ایده دیگر راه حل ادامه این سوال این است که

$$\phi(u,v) = 0 \iff v = f(u)$$

$$\ln z - \frac{1}{2}(x+y)^2 = f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right) \xrightarrow{Z(x,0)=x^2} \ln x^2 - \frac{1}{2}x^2 = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \ln 4t^2 - 2t^2$$

* جایگذاری f در $\Rightarrow \ln z - \frac{1}{2}(x+y)^2 = \ln 4\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2$

$$V_{xx} - \omega^2 V = 0 \qquad 0 < x < \pi$$

$$V = c_1 \sinh \omega x + c_2 \cosh \omega x$$

$$V(0,\omega) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$V(\pi,\omega) = c_1 \sinh \omega\pi = \frac{2e^{-6}}{\omega^2+4} \Rightarrow c_1 = \frac{2e^{-6}}{\omega^2+4} \frac{1}{\sinh \omega\pi}$$

$$\boxed{v(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2e^{-6}}{\omega^2+4} \frac{\sinh \omega x}{\sinh \omega\pi} \cos \omega y \, d\omega}$$

-4

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \qquad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u(1,\theta) = g(\theta) \qquad u(r,0) = u(r,\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$u(r,\theta) = F(r)G(\theta)$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

$$F''G + \frac{1}{r}F'G + \frac{1}{r^2}FG'' = 0$$

$$\frac{F''}{F} + \frac{1}{r}\frac{F'}{F} + \frac{1}{r^2}\frac{G''}{G} = 0 \Rightarrow \frac{-G''}{G} = r^2\frac{F''}{F} + r\frac{F'}{F} = \lambda = +\omega^2$$

$$G = c_1 \sin \omega\theta + c_2 \cos \omega\theta \ , \quad G(0) = 0, \quad G(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$\boxed{c_2 = 0}, \quad \sin \omega\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \omega\frac{\pi}{2} = n\pi \Rightarrow \boxed{\omega = 2n}$$

$$u(x, y+3) = v(x, y) \xRightarrow{\text{ناحیه جدید}} \begin{array}{l} 0<x<\pi \\ y+3>3 \Rightarrow y>0 \end{array} \qquad -3$$

$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$v(0, y) = u(0, y+3) = 0$$

$$v(\pi, y) = u(\pi, y+3) = e^{-2(y+3)}$$

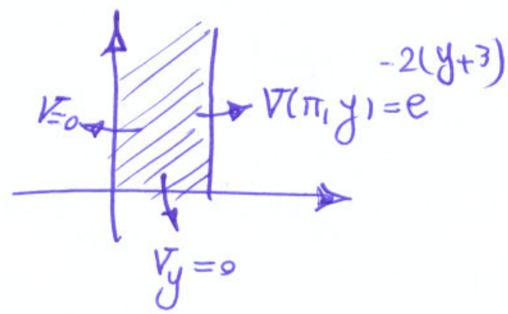
$$u_y(x, 3) = 0 \Rightarrow v_y(x, 0) = u_y(x, 3) = 0$$

بنابراین شکل جدید معادله بصورت زیر است

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \qquad 0<x<\pi, \quad y>0$$

$$v(0, y) = v_y(x, 0) = 0$$

$$v(\pi, y) = e^{-2(y+3)}$$



$\boxed{\cos \omega y = \text{هسته تبدیل}}$ از تبدیل فوریه cos روی متغیر y استفاده می‌کنیم

$$v(x, y) \xrightarrow{\int_0^\infty v \cos \omega y \, dy} V(x, \omega)$$

$$V(x, \omega) \xrightarrow{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V \cos \omega y \, d\omega} v(x, y)$$

$$F_c(v_{xx}) = V_{xx}$$

$$F_c(v_{yy}) = -\omega^2 V$$

$$V(\pi, \omega) = \int_0^\infty e^{-2(y+3)} \cos \omega y \, dy$$

$$\boxed{V(0, \omega) = 0}$$

$$V(\pi, \omega) = e^{-6} \left. \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right|_{s=2} = \frac{2e^{-6}}{\omega^2 + 4}$$

$$G(\theta) = \left\{ \sin 2n\theta \right\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad \lambda = +4n^2$$

$n \neq 0$

$$r^2 F'' + r F' - 4n^2 F = 0 \Rightarrow F = A r^{2n} + \cancel{B r^{-2n}}$$

شرط پایداری در $r \to 0$ ایجاب می‌کند $B = 0$ باشد بنابراین داریم

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{2n} \sin 2n\theta$$

$$@\ r = 1 \Rightarrow f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin 2n\theta$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^{l} f(\theta) \sin 2n\theta \, d\theta$$

$\frac{\pi}{2}$

شماره: «شماره»　　امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی　　شنبه ۹۶/۸/۲۰

دانشگاه صنعتی امیرکبیر　　مدت ۱۰۰ دقیقه

---

۱) الف: اگر $f(x) = \sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{3x}{2} + \sin^2\frac{5x}{2}$ ، مقدار $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx$ را محاسبه کنید.

ب: اگر $g(x)$ در رابطه $\int_0^\infty g(x)\sin(\lambda x)\,dx + \int_0^\infty xg(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0$ صدق کند و $g(1) = 1$ مقدار $g(x)$ را بیابید.

---

۲) معادله زیر را حل کنید.

$$2z_x - 3z_y + (x+y)z = 0$$

$$z(x,0) = x^2$$

---

۳) معادله زیر را به فرم کانونی درآورده و سپس حل کنید.

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - xy = 0$$

---

۴) معادله موج زیر را حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx} \quad , \qquad 0 < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u_x(0,t) = 0 \ , \qquad \lim_{x\to\infty} u(x,t) = \lim_{x\to\infty} u_x\,(x,t) = 0$$

$$u_t(x,0) = 0 \ , \qquad u(x,0) = f(x) \quad x^2e^{-x}$$

---

۵) معادله زیر را حل کنید.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad 0 < r < 2 \ , \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$u(r,0) = u\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$u(2,\theta) = sin2\theta$$

موفق باشید

پاسخ امتحان 96,8

۱- الف)

$$f(x) = \sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{3x}{2} + \sin^2\frac{5x}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\boxed{\cos x} - \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 5x$$ ← سری فوریه

$$T = 2\pi \Leftarrow \frac{2\pi}{T} = \omega = 1$$

برای تعیین T از جمله با کمترین فرکانس استفاده می‌کنیم

$$\ell = \frac{T}{2} = \pi \xRightarrow{\text{اتحاد پارسوال}} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + a_2^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{3^2}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3 = \frac{21}{4} \Rightarrow \boxed{I = \frac{21\pi}{4}}$$

ب)

$$\underbrace{\int_0^\infty g(x)\sin(\lambda x)\,dx}_{f(\lambda)} + \underbrace{\int_0^\infty x g(x)\cos(\lambda x)\,dx}_{f'(\lambda)} = 0 \quad , g(1) = 1$$

$$f(\lambda) + f'(\lambda) = 0 \Rightarrow \frac{df}{f} = -d\lambda \Rightarrow f = ce^{-\lambda}$$

$$\int_0^\infty g(x)\sin\lambda x\,dx = ce^{-\lambda} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^\infty ce^{-\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda = g(x)$$

$$g(x) = \frac{2c}{\pi}\,\frac{x}{x^2+s^2}\bigg|_{s=1} = \frac{2cx}{\pi(x^2+1)} \xRightarrow{g(1)=1} c = \pi \Rightarrow \boxed{g(x) = \frac{2x}{x^2+1}}$$

۲- تکراری است در امتحان 96,1 آمده است.

-3

$$\overset{A}{x^2} u_{xx} - \overset{C}{y^2} u_{yy} = xy$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4x^2y^2 > 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} = O(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm 2xy}{2x^2} = \frac{y}{x}, -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + \ln c_1 \Rightarrow \boxed{y = c_1 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln x + \ln y = \ln c_2 \Rightarrow \boxed{xy = c_2}$$

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = xy \qquad u - \begin{cases} \xi - \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ \eta - \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases}$$

$$u_x = u_\xi\left(\frac{-y}{x^2}\right) + u_\eta(y)$$

$$u_y = u_\xi\left(\frac{1}{x}\right) + u_\eta(x)$$

$$u_{xx} = \frac{2y}{x^3} u_\xi + \left(\frac{-y}{x^2}\right)(u_\xi)_x + y\,(u_\eta)_x$$

$$x^2 \quad \boxed{u_{xx} = \frac{2y}{x^3} u_\xi + \left(\frac{-y}{x^2}\right)\left(u_{\xi\xi}\left(\frac{-y}{x^2}\right) + u_{\xi\eta}(y)\right) + y\left(u_{\eta\xi}\left(\frac{-y}{x^2}\right) + u_{\eta\eta}(y\right.}$$

$$u_{yy} = (u_y)_y = \frac{1}{x}(u_\xi)_y + (u_\eta)_y\, x$$

$$-y^2 \quad \boxed{u_{yy} = \frac{1}{x}\left(u_{\xi\xi}\left(\frac{1}{x}\right) + u_{\xi\eta}(x)\right) + x\left(u_{\eta\xi}\left(\frac{1}{x}\right) + u_{\eta\eta}(x)\right)}$$

PDE: $u_{tt} = u_{xx} \qquad 0<x<\infty \qquad t>0$

B.C. $u_x(0,t) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} u, u_x = 0 \qquad$ kernel $= \cos\omega x$

I.C. $u_t(x,0) = 0 \;, \quad u(x,0) = x^2 e^{-x}$

$$u(x,t) \xrightarrow{\int_0^\infty u \cos\omega x \, dx} U(\omega,t)$$

$$U(\omega,t) \xrightarrow{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty U(\omega,t)\cos\omega x \, d\omega} u(x,t)$$

$$\ddot{U} = -\omega^2 U$$

$$\ddot{U} + \omega^2 U = 0$$

$$U = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t$$

$$U_t(\omega,0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$U(\omega,0) = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = 2\,\frac{1-3\omega^2}{(1+\omega^2)^3}}$$

$$\boxed{U = 2\,\frac{1-3\omega^2}{(1+\omega^2)^3}\cos\omega t}$$

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U(\omega,t)\cos\omega x \, d\omega$$

$$F_c(u_{tt}) = \ddot{U}$$

$$F_c(u_{xx}) = -\omega^2 U \;, \quad B.C. = 0$$

$$F_c(u_t(x,0)) = 0$$

$$\boxed{U(x,0) = \int_0^\infty x^2 e^{-x} \cos\omega x \, dx}$$

سوال خوبیه

برای حل این انتگرال x^2 را کنار می‌گذارم

$$g(\omega) = \int_0^\infty e^{-x} \cos\omega x \, dx = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$g''(\omega) = \int_0^\infty -x^2 e^{-x} \cos\omega x \, dx$$

$$U(x,0) = -\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)''$$

$$\boxed{U(x,0) = 2\,\frac{1-3\omega^2}{(1+\omega^2)^3}}$$

$$\cancel{u_{\xi\xi}\left(\frac{y^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)} + u_{\xi\eta}\left(-2y^2-2y^2\right) + \cancel{u_{\eta\eta}\left(x^2y^2-x^2y^2\right)} + 2\frac{y}{x}u_\xi = xy$$

$$-4y^2 u_{\xi\eta} + 2\frac{y}{x}u_\xi = xy \qquad \boxed{\xi\eta = y^2}$$

$$-4\xi\eta\, u_{\xi\eta} + 2\xi \overset{v}{u_\xi} = \eta$$

$$-4\xi\eta\, v_\eta + 2\xi v = \eta$$

$$v_\eta - \frac{1}{2\eta}v = \frac{-1}{4\xi}$$

$$F = e^{-\frac{1}{2}\ln\eta} = \eta^{-\frac{1}{2}}$$

$$v = \eta^{\frac{1}{2}}\left(\int \eta^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4\xi}\right)d\eta + c(\xi)\right)$$

$$u_\xi = v = c(\xi)\eta^{\frac{1}{2}} - \frac{\eta}{2\xi}$$

$$u = f(\xi)\eta^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\eta\ln\xi + g(\eta)$$

$$u = \sqrt{xy}\, f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}xy\ln\frac{y}{x} + g(xy)$$